

文章编号: 1000-7598-(2006) 增-0045-05

大变形固结理论最终沉降量分析

丁洲祥¹, 朱合华¹, 龚晓南²

(1. 同济大学 地下建筑与工程系 上海 200092; 2. 浙江大学 岩土工程研究所, 杭州 310027)

摘 要: 大变形理论的力学机制较为严格, 但由于其固有的复杂性和非线性, 目前对大小变形理论计算的沉降量差别仍存在争议。基于连续介质力学基本原理, 采用土力学符号约定推导了 T.L. 描述的大变形固结增量有限元方程组及其总应力分析形式。结合算例, 分析了材料线性化和材料几何双线性化简化算法的影响, 探讨了较合适的荷载增量步长, 讨论了大、小变形法计算的最终沉降量差别。结果表明, 荷载增量步长对两种线性化法计算结果较为敏感; 大变形法计算的沉降量偏大于小变形结果, 这可能是由几何非线性问题的“拉压刚度不同”效应引起; 初应力矩阵对最终沉降量有较大影响等。

关 键 词: 最终沉降量; 大变形固结理论; 小变形固结理论; 有限元法; 连续介质力学

中图分类号: TU433 文献标识码: A

Study on prediction of ultimate settlement using finite-strain consolidation theory

DING Zhou-xiang¹, ZHU He-hua¹, GONG Xiao-nan²

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: Although the mechanism of finite strain consolidation (FSC) theory is rigorous, its inherent complexity and non-linearity lead to the present controversy on the difference between foundation settlements predicted by FSC theory and by small strain (SS) theory. Based on fundamentals of continuum mechanics, the FSC incremental finite element (FE) equations with total Lagrangian (TL) description are formulated using soil mechanics sign convention; and the corresponding reduced FE equations for total stress analysis are also obtained. Through a case study, the influence of material linearization method and material geometrical bi-linearization method on the results of FSC theory is analyzed with the discussion of the appropriate length of sub-load step, and the difference between the ultimate settlements by FSC theory and SS theory are probed. The results show that the predicted settlements by linearization methods are sensitive to the length of sub-load step; the settlement by FSC theory is larger than that by SS theory, due to the effect of different stiffnesses under tensile and compressed state in geometrically nonlinearity problems; the initial stress matrix plays an important role in calculating the ultimate settlement by FSC theory, etc.

Key words: ultimate settlement; finite-strain consolidation theory; small-strain consolidation theory; finite element method; continuum mechanics

1 前 言

新理论的诞生和完善离不开工程实践的推动。基于连续介质力学基本原理的大变形固结 (FSC) 理论也不例外。随着当前土木工程建设的蓬勃发展和荷载等级的提高, 如何减少软土地基可能发生的较大沉降已成为地基基础方案设计中重点考虑的问题之一。

实践早已证明, 预压排水固结法是处理软基非常有效的方法。但设计原理仍然主要基于小变形固结理论 (尤其是 Terzaghi 固结理论), 其中的小变形假设与预压过程中发生较大沉降的事实相矛盾。这一矛盾的产生促进了大变形固结理论的发展, 同时向大变形固结理论提出更高的要求。大变形固结理论首先需要回答一个最基本的问题: 大小变形固结理论预测的地基沉降量之间究竟存在何种

收稿日期: 2006-6-28

基金项目: 中国博士后科学基金资助项目 (No. 20060400177); 国家自然科学基金项目 (No. 50578143)。

作者简介: 丁洲祥, 男, 1976 年生, 博士, 从事隧道与地下结构工程、岩土力学及数值方法等方面的研究。E-mail: dingzhouxiang@163.com

定性偏差?

为了更好地指导工程设计和施工 (如处理方案设计、确定停荷期和工后沉降等), FSC 理论无法回避上述问题。自从 Carter 等^[1]开始用有限元法研究 FSC 理论的近 30 年来国内学者^[2-7]也进行了大量卓有成效的工作。然而, 大、小变形固结理论计算结果之间的差别仍处于争议阶段^[1-7]。鉴于这种情况, 何开胜等^[5]提出大、小变形分析结果应以总应力法比较才有意义, 并进而认为大变形法计算的最终沉降量要小于小变形结果。罗晓辉^[7]近来的研究结果却又认为大变形理论计算的各场变量均偏大。

以往研究中对大、小变形理论结果的差别非常重视, 但对相关数值解法的效率和导致争议的原因却鲜有详细报道。在用 FSC 理论计算最终沉降量时, 其非线性有限元方程组的求解通常会涉及材料和几何线性化等简化方法, 这两种简化法对计算结果将产生何种影响是值得关注的, 因为它直接关系到所得结论的可靠性和准确性。笔者将探讨这方面的有关问题, 并尝试分析大、小变形理论计算的最终沉降量差别, 以供更深入的研究做参考。

2 大变形固结有限元列式

FSC 理论的有限元列式包括平衡条件的空间离散和连续性条件的时空离散。土力学中按惯例一般使用土力学符号约定, 这不同于连续介质力学符号约定。在推导 FSC 有限元方程时, 需要注意使用的符号约定的一致性。本文使用土力学符号约定推导 T. L. 描述的 FSC 增量有限元方程。

在增量分析中, 一般设 t 时刻为已知时刻, 欲求 $t + \Delta t$ 时刻的各物理量。时刻 $t + \Delta t$ 的平衡条件的等效积分形式 (虚功方程) 为

$$\int_{V_0} \delta \bar{\mathbf{E}}^T \bar{\mathbf{S}} dV_0 = \int_{V_0} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{f}} dV_0 + \int_{A_0} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{q}}_0 dA_0 \quad (1)$$

式中: 各字母上带有一横的量都是相应于时刻 $t + \Delta t$ 的待求量; $\bar{\mathbf{S}}$ 为总应力, $\bar{\mathbf{u}}$ 为位移, $\bar{\mathbf{f}}$ 和 $\bar{\mathbf{q}}_0$ 分别为体力 and 面力荷载。

连续性方程 (积分形式) 为

$$\int_{V_0} (\mathbf{T}^T \dot{\mathbf{E}} + \nabla^T \mathbf{K} \nabla p) dV_0 = 0 \quad (2)$$

式中: $\mathbf{T}$ 为选项矢量, $\mathbf{T} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T$; $\mathbf{K}$ 为渗流系数矩阵; ∇ 是 Hamilton 算子。

有效应力方程、几何方程和简化的本构方程的有限增量形式分别为

$$\Delta \mathbf{S} = \Delta \mathbf{S}' + \alpha \Delta p \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E} &= \Delta \mathbf{E}_{L0} + \Delta \mathbf{E}_{L1} + \Delta \mathbf{E}_N = \\ &= \mathbf{L} \Delta \mathbf{u} - \mathbf{A} \Delta \boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{A} \Delta \boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Delta \mathbf{S}' = \mathbf{D}^{(j)} \Delta \mathbf{E}, \text{ 或 } \Delta \mathbf{S}'_{ij} = \mathbf{D}^{(j)}_{ijkl} \Delta \mathbf{E}_{kl} \quad (5)$$

式中: α 为有效应力系数矢量; p 为孔压; $\Delta \mathbf{u}$ 为位移增量; $\boldsymbol{\theta}$ 为位移增量梯度矢量; $\mathbf{L}$ 为偏微分算子矩阵; $\mathbf{A}$ 为位移梯度矩阵; $\mathbf{D}^{(j)}_{ijkl}$ 为时步增量起始时刻的 Jaumann 率型本构张量, $\mathbf{D}^{(j)}$ 为其矩阵形式。

大变形固结等参元的插值模式为

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \Delta \mathbf{u}_e, \quad \Delta p = \bar{\mathbf{N}} \Delta p_e \quad (6)$$

式中 $\Delta \mathbf{u}_e$ 和 Δp_e 分别为单元节点位移增量和孔压增量; $\mathbf{N}$ 和 $\bar{\mathbf{N}}$ 分别为位移插值函数矩阵和孔压插值函数矩阵。

联立式 (3) ~ (5) 和式 (6), 采用 Galerkin 加权残值法和时域差分对式 (2) 进行时空离散, 同时对式 (1) 进行变换, 最后可得到 FSC 增量有限元方程

$$\tilde{\mathbf{E}} \Delta \mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (7)$$

式中:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{DS} & -\tilde{\mathbf{K}}_C \\ -\tilde{\mathbf{K}}_{CS} & -\theta \Delta t \mathbf{K}_{SQ} \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_e \\ \Delta p_e \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{R} &= \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_0 + \mathbf{R}_S \\ \Delta t \mathbf{K}_{SQ} p_e + \Delta t \mathbf{R}_q \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_{DS} = \tilde{\mathbf{K}}_D - \tilde{\mathbf{K}}_S, \\ \tilde{\mathbf{K}}_D &= \int_{V_0} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{(j)} \tilde{\mathbf{B}} dV_0, \quad \mathbf{K}_S = \int_{V_0} \mathbf{G}^T \mathbf{M} \mathbf{G} dV_0, \\ \tilde{\mathbf{K}}_C &= \int_{V_0} \mathbf{B}^T \alpha \bar{\mathbf{N}} dV_0, \quad \tilde{\mathbf{K}}_{CS} = \int_{V_0} \mathbf{N}^T \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{B}} dV_0, \\ \mathbf{K}_{SQ} &= \int_{V_0} (\nabla \bar{\mathbf{N}})^T \mathbf{K} (\nabla \bar{\mathbf{N}}) dV_0, \\ \mathbf{R}_S &= \int_{V_0} (\mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1})^T \mathbf{S} dV_0 \end{aligned} \quad (8)$$

3 大变形固结非线性方程组的求解

值得强调的是, 式 (5) 采用了简化的本构关系。 $\mathbf{D}^{(j)}$ 是时步增量开始时刻的切线本构矩阵, 只有用于无限小增量本构关系时才是准确的。本文将有限增量本构关系中使用 $\mathbf{D}^{(j)}$ 的简化方法称为材料线性化法; 将这种简化方法推广于所有时步, 称为分段材料线性化法。沈珠江^[8]在对小变形 Biot 固结理论进行研究时就较早地提出分段材料线性化

的思想。

经过材料线性化后, FSC 增量有限元方程组的非线性主要属于几何非线性——由应变转换矩阵 $\mathbf{B}$ 和 $\tilde{\mathbf{B}}$ 中关于位移增量的二次项产生。对此, 目前的处理方法主要有几何线性化法和迭代法两大类。在当前时步的计算中不考虑位移增量的影响时, 式 (7) 就退化为线性方程组, 以其解答作为式 (7) 的真实解时, 就是最简单的几何线性化法。在此基础上, 利用“平均应力”的思想改进单元固结矩阵, 以重新计算后的解答作为式 (7) 的真实解, 可称为改进形式的几何线性化法。本文将这两种形式统称为几何线性化法。可见, 几何线性化法得到的解答是近似解。

要得到材料线性化后具有几何非线性的 FSC 方程组的较精确解答, 需要使用迭代解法。下文中将采用 Newton-Raphson 型迭代算法。再按文献[9,10]的方法对上述有效应力分析法进行处理, 即得到大变形总应力分析法。

4 算例分析

本次分析目的有 2: 分析材料线性化和几何线性化两种近似法的计算误差变化规律; 尝试探讨大、小变形理论计算的最终沉降量的差别。

在连续介质力学中, 大变形本构关系一般由小变形本构关系转换而来。即使选择线弹性的小变形本构关系, 经过张量变换后得到的大变形本构关系通常也不是线性的。本着尽量简洁的原则, 设计的一维大变形算例与文献[4]基本相同: 小变形本构关系为线弹性, 土体变形模量为 600 kPa; 土层厚度为 20 m; 采用一次性加荷; 单元数目 20 个, 均匀划分。为提高计算结果的精度, 迭代算法中采用误差控制标准, 以失衡力的 $-\infty$ 范数小于 10^{-6} 作为终止迭代的条件。

4.1 材料线性化的影响

由于式 (7) 是经过材料线性化得到的非线性方程组, 为减小材料线性化引起的误差, 一般需要将总荷载分成若干荷载增量步, 按增量法计算。

不妨把 100 kPa 的总荷载均分为若干荷载步 (1,5,10,20,40,50,100 和 200 等)。对每个荷载增量步的几何非线性, 采用上述 Newton-Raphson 法和误差标准进行迭代求解。计算的最终沉降量与荷载步数的关系如图 1 所示。其中, TL 表示按 T.L.描述的大变形理论得到的结果, 而 SS 表示小变形法的计算结果。可见: (1) 随着荷载步数的增加, TL 结果

趋于收敛, 说明只要减小荷载增量步长, 材料线性化对大变形分析结果的影响是很小的; (2) 荷载步数不影响小变形分析结果 SS。

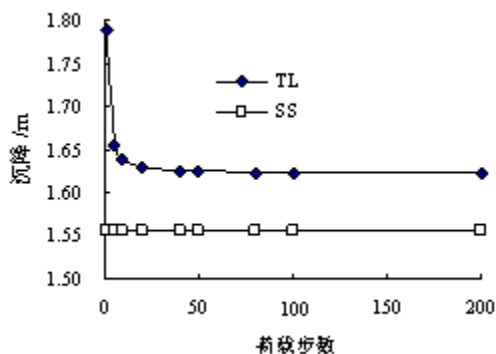


图 1 最终沉降量计算值与荷载步数的关系

Fig.1 Relation between calculated ultimate settlement and number of load steps

增加荷载步数 (或减小荷载增量步长) 以提高结果精度的代价是导致计算量的增加。图 2 中所示的总迭代次数随荷载步数的增大而迅速增大的规律很好地说明了这一点。

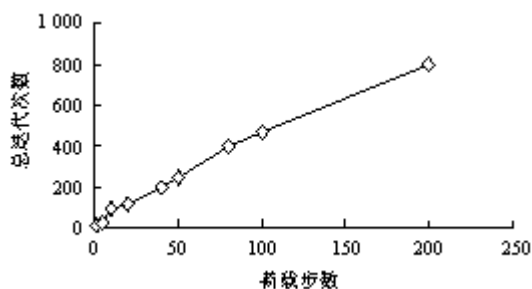


图 2 总迭代次数与荷载步数的关系

Fig.2 Relation between number of iterations and number of load steps

再以 400 kPa 的较大荷载为例, 分析不同荷载步数对结果的影响, 以及各增量步对应的沉降值。不同荷载步的 T.L.法沉降量-荷载关系如图 3 所示。在沉降量达到 3.037 m 左右时, 荷载步 $n=50$ 的结果开始出现漂移。荷载步 $n=100$ 的结果在沉降量达 7.601 m 左右发生漂移。而荷载步 $n=200$ 和 250 的结果没有发生漂移。这从另一角度说明: 在材料线性化条件下, 减小荷载增量步长对于得到稳定的大变形分析数值解是非常重要的。

4.2 几何线性化的影响

在增量计算中忽略当前时步位移增量的影响, 即为几何线性化。以 LTL 表示几何线性化的大变形

法结果, 则 LTL 其实是经过材料和几何双线性化的解答。

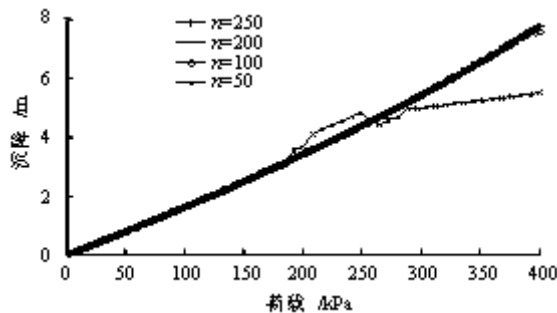


图 3 不同荷载步时的沉降-荷载曲线

Fig.3 Curve of settlement vs. load using various load steps

以 100 kPa 和 400 kPa 两种荷载水平为例, 分析最终沉降量的 LTL 结果与荷载步数的变化规律, 如图 4 所示。作为对比, 图 4 中还给出了考虑几何非线性的结果 TL。可见: (1) LTL 的结果与荷载步的数量密切相关, 当荷载步数较少时, 其计算沉降值偏小, 随着荷载步数的增加, 其值逐渐增大并趋于收敛; (2) 当荷载步数较少时, TL 结果偏大, 随着荷载步数的增多, 其结果也趋于收敛; (3) 由于非线性问题的复杂性, 当荷载水平较高而设置的荷载步较少时, 考虑几何非线性的 TL 结果有时可能没有同等条件下的 LTL 结果准确。只有当荷载增量步长较小条件下, 考虑几何非线性的迭代法才能更好的显示其精度较高的优越性。

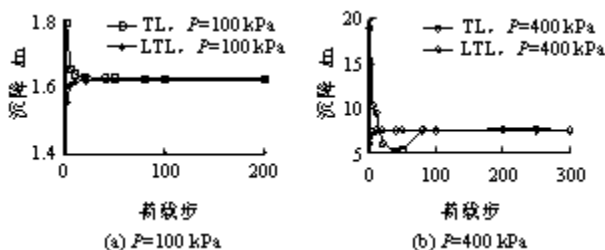


图 4 双线性化的最终沉降量与荷载步数的关系

Fig.4 Relation between ultimate settlement using bi-linearization method and load steps

综合上述分析可知, 一定荷载条件下的荷载步数 (或荷载增量步长) 对材料线性和双线性化的大变形分析结果非常敏感。若荷载增量步长过大, 则计算结果可能不收敛或不可靠; 反之则计算时间又太长。权衡两者, 在本算例条件下采用 1~2 kPa 的荷载增量步长较为合适。这也验证了何开胜等^[5]的观点: 经过线性化后, 必须使用很小的时间步长 (对应于本文总应力分析中的荷载增量步长), 才能得到合理的精度和沉降结果。

4.3 大、小变形法计算的最终沉降量

设总荷载分别为 $P=100, 200$ kPa 和 400 kPa。

按上述方法, 可求得地基最终沉降量的材料线性化和双线性化大变形解答, 分别见表 1 和表 2。可见,

(1) FSC 理论计算的最终沉降量 TL 和 LTL, 均偏大于小变形结果; (2) 在相同条件下, 最终沉降量的双线性化解答 LTL 一般偏小于材料线性化解答 TL, 但由于步长较小, 两者的偏差在定量特征上很小。

为了考察初应力矩阵 K_S 对计算结果的影响, 表 1 (表 2) 中还给出两种特殊情况下 FSC 理论的结果 TL1 (LTL1) 和 TL2 (LTL2)。其中, TL1 (LTL1) 不考虑 FSC 有限元系数矩阵 $\tilde{K}$ 中的初应力矩阵 K_S , 即 $\tilde{K}_{DS} = \tilde{K}_D$; TL2 (LTL2) 考虑 K_S , 但将其取为相反数, 即 $\tilde{K}_{DS} = \tilde{K}_D + K_S$ 。

由表 1 和表 2 中的结果容易看出, 初应力矩阵的影响非常明显; 不考虑初应力矩阵或将其取为相反数将导致计算的沉降量偏小, 甚至小于小变形法的相应结果。由于本文统一采用土力学符号约定, $\tilde{K}_{DS} = \tilde{K}_D - K_S$ 是严格形式, 不同于固体力学中常见的 $\tilde{K}_{DS} = \tilde{K}_D + K_S$ 形式 (事实上, 只要保证使用符号约定的一致性, 不同符号约定不会对计算结果引起本质上的差别)。

表 1 材料线性化法计算的最终沉降量
Table 1 Predicted ultimate settlement using material linearization method

总荷载 /kPa	荷载 步数	最终沉降量 /m			
		SS	TL	TL1	TL2
100	100	1.556	1.623	1.556	1.499
200	100	3.111	3.410	3.105	2.889
400	200	6.222	7.757	6.118	5.360

表 2 双线性化法计算的最终沉降量
Table 2 Predicted ultimate settlement using bi-linearization method

总荷载 /kPa	荷载 步数	最终沉降量 /m			
		SS	SS	SS	SS
100	100	1.556	1.621	1.554	1.497
200	100	3.111	3.398	3.098	2.883
400	200	6.222	7.707	6.102	5.351

真实土体一般不能承受或只能承受较小的拉应力。这里为了与固体力学几何非线性理论的结果进行对比, 不妨将一维土体与杆等效, 假设能承受较大的拉应力, 分析其拉伸变形量。大、小变形理论的计算结果如表 3 所示。容易看出: (1) 对一定的荷载水平而言, 小变形理论计算的拉伸变形与压缩

变形是相等的；(2) TL 法计算的拉伸变形量小于小变形结果；(3) 初应力矩阵的影响较为显著，忽略初应力矩阵或取其相反数值将导致计算的拉伸变形偏大；(4) 对比表 1 和表 3 中的数据，在同样大小的拉压荷载作用下，大变形理论计算的压缩变形量和拉伸变形是不一样的，即反映出几何非线性问题的“拉压刚度不同”效应。

表 3 不同方法计算的拉伸变形量
Table.3 Predicted tensile deformation using
different methods

总荷载 /kPa	荷载 步数	拉伸变形 /m			
		SS	SS	SS	SS
100	100	1.556	1.498	1.552	1.615
200	100	3.111	2.898	3.094	3.354
400	200	6.222	5.470	6.133	7.269

在非线性固体力学中，作为表示大变形情况下初应力对结构刚度影响的初应力矩阵，其“拉压刚度不同”效应可以解释为：当应力为拉应力时，提高了结构刚度；当应力为压应力时，减小了结构的刚度^[11]。本文的大变形分析结果 TL 正反映了此效应。

5 结 语

本文按土力学符号约定导出了计算最终沉降量的大变形增量有限元方法，分析了常用的材料线性和几何线性化等简化方法对计算结果的影响，并探讨了大、小变形理论计算结果之间的差别。算例分析结果表明：

(1) 荷载增量步长对材料线性化法和双线性化法的计算结果都较为敏感。从兼顾计算效率和结果精度的角度来看，采用 1~2 kPa 的步长较为合适；此时，材料线性化（双线性化）法计算的沉降值一般会稍微偏大（小）于收敛解。

(2) 大变形法计算的最终沉降量偏大于相同条件下的小变形结果。这可能是由几何非线性问题的“拉压刚度不同”效应引起的，即地基的压应力状态使其表现出大变形分析中的“刚度减小”现象。

(3) 初应力矩阵对大变形分析结果有重要影

响。忽略初应力矩阵或取其相反数将导致计算的沉降值偏小，甚至偏小于小变形结果。有限元列式的推导过程中需要注意符号约定的一致性。

鉴于大变形理论和土体性状的复杂性，本文工作仅是初步和探讨性的，以期起到抛砖引玉的作用，深化对大小变形法计算差别及其原因的认识。

参 考 文 献

- [1] CARTER J P, SMALL J C, BOOKER J R. A theory of finite elastic consolidation[J]. *Int J Solids Structures*, 1977, 13: 461—478.
- [2] 周正明. 饱和土体大变形固结有限元分析[J]. *水利水运科学研究*, 1992, (1): 106—110.
- [3] 谢永利. 大变形固结理论及其有限元分析[D]. 杭州: 浙江大学, 1994.
- [4] 蒋明镜, 沈珠江. 饱和软土的弹塑性大变形有限元平面固结分析[J]. *河海大学学报*, 1998, 26(1): 73—77.
- [5] 何开胜, 沈珠江, 彭新宣. 两种 Lagrangian 大变形比奥固结有限元法及其与小变形法的比较[J]. *岩土工程学报*, 2000, 22(1): 30—34.
- [6] 李韬. U.L.描述的大变形固结理论及其有限元分析[D]. 西安: 长安大学, 2001.
- [7] 罗晓辉. 深基坑性状的有限变形时空效应研究[D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2002.
- [8] 沈珠江. 用有限单元法计算软土地基的固结变形[J]. *水利水运科技情报*, 1977, (1): 7—23.
- [9] 龚晓南. 土工计算机分析[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000.
- [10] 谢康和, 周健. 岩土工程有限元分析理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [11] 吴永礼. 计算固体力学方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [12] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000. 133—186.
- [13] 殷有泉. 固体力学非线性有限元引论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1987.
- [14] 朱百里, 沈珠江编著. 计算土力学[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1990.
- [15] 丁洲祥. 欧拉描述的大变形固结理论及其有限元法[D]. 西安: 长安大学, 2002.